Winter 2015 Exam 2

1) a) $\begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} \cos(2\pi/3) & -\sin(2\pi/3) & 0 \\ \sin(2\pi/3) & \cos(2\pi/3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -1/2 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

d)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & -8 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 13 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1/6 & -\frac{7\sqrt{3}}{2} & -8 \\ \sqrt{3}/6 & -7/2 & 13 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2) a) i) zero vector $(0,0,0,0)$

$0 = 0 + 0 = 0$ ✓

ii) addition + scalar mult.

Let (x_1, y_1, z_1, w_1), $(x_2, y_2, z_2, w_2) \in W$

and $c \in \mathbb{R}$. Then

$x_1 + w_1 = y_1 + z_1$, $x_2 + w_2 = y_2 + z_2$

Then

$c(x_1, y_1, z_1, w_1) + (x_2, y_2, z_2, w_2)$

$= (cx_1 + x_2, cy_1 + y_2, cz_1 + z_2, cw_1 + w_2)$

so

$$(cx_1+x_2)+(cw_1+w_2)$$

$$= c(x_1+w_1)+(x_2+w_2)$$

$$= c(y_1+z_1)+(y_2+z_2)$$

$$=((cy_1+y_2))+(cz_1+z_2)$$ ✓

b) Let $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in S$

$A+B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \notin S$ since

$1 \cdot 1 = 1 \neq 0$

3) Don't need to know this

4) a) Column space:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ -12 \\ 14 \end{bmatrix}$$

kernel:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & 1 \\ 0 & -12 & 4 & 8 \\ -1 & 14 & -5 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

So rref $\begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -12 & 4 & 8 & 0 \\ -1 & 14 & -5 & -11 & 0 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 5/3 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

So

$$x + \tfrac{1}{3}z + \tfrac{5}{3}w = 0$$

$$y - \tfrac{1}{3}z - \tfrac{2}{3}w = 0$$

$$\begin{bmatrix} -5/3 \\ 2/3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/3 \\ 1/3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b)

$$\ker(T) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \,\middle|\, T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

So

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{a+d}{2} & 0 \\ 0 & \frac{a+d}{2} \end{bmatrix}$$

so $\frac{a+d}{2} = 0$, $a = -d$

$$\ker(T) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

Let $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

and $k \in \mathbb{R}$. Then

$$T\left(k\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= T\left(\begin{bmatrix} ka_1+a_2 & kb_1+b_2 \\ kc_1+c_2 & kd_1+d_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{ka_1+a_2+kd_1+d_2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{ka_1+a_2+kd_1+d_2}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{ka_1+kd_1}{2} + \frac{a_2+d_2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{ka_1+kd_1}{2} + \frac{a_2+d_2}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{k(a_1+d_1)}{2} & 0 \\ 0 & \frac{k(a_1+d_1)}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{a_2+d_2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{a_2+d_2}{2} \end{bmatrix}$$

$$= k \begin{bmatrix} \frac{a_1+d_1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{a_1+d_1}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{a_2+d_2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{a_2+d_2}{2} \end{bmatrix}$$

$$= kT\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}\right)$$