

Exam 3 Fall '21

$$\begin{aligned} a) \quad & A - \lambda I_2 \\ &= \begin{bmatrix} -29 - \lambda & -18 \\ 54 & 34 - \lambda \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$0 = \det(A - \lambda I_2)$$

$$= (-29 - \lambda)(34 - \lambda) + 172$$

$$= -986 + \lambda^2 - 5\lambda + 172$$

$$= \lambda^2 - 5\lambda - 14$$

$$= (\lambda - 7)(\lambda + 2)$$

$$\lambda = 7, -2$$

$$b) A \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -29 & -18 \\ 54 & 34 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \checkmark$$

$$A \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -29 & -18 \\ 54 & 34 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -7 \\ 14 \end{bmatrix} = 7 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \checkmark$$

$$2) \quad a) \quad y = mx + b$$

$$-4 = m + b$$

$$2 = -m + b$$

$$3 = 2m + b$$

$$7 = -4m + b$$

$$b) \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$c) \quad A^t A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 22 \end{bmatrix}$$

$$A^t \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 \\ -28 \end{bmatrix}$$

$$d) \begin{bmatrix} b \\ m \end{bmatrix} = (A^t A)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ -28 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{84} \begin{bmatrix} 20 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ -28 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{84} \begin{bmatrix} 120 \\ -96 \end{bmatrix}$$

$$y = -\frac{24}{21}x + \frac{30}{21}$$

$$3) a) T \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$T \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -1 \\ -6 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 12 & 0 & -4 & -1 \\ 4 & 5 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 8 & -8 \end{bmatrix}$$

$$b) \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -16 \\ -6 \end{bmatrix}$$

but any 4 vectors in \mathbb{R}^3 that aren't multiples will work.

$$c) \text{ want } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

$$\text{with } T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 12x - 4z + 4w \\ 4x + 5y + 6z - 16w \\ 8z - 6w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{set } w = 8. \text{ then } z = 6$$

$$12x - 24 + 8 = 0$$

$$12x - 16 = 0$$

$$x = 4/3$$

$$4\left(\frac{4}{3}\right) + 5y + 36 - 128 = 0$$

$$\frac{16}{3} + 5y = 92$$

$$5y = \frac{260}{3}$$

$$y = \frac{52}{3}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{52}{3} \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$4) \quad a) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b) \begin{bmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 1 \\ 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$c) \quad C = \frac{17}{20} B + \frac{3/20}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/20 & 1/3 & 2/10 \\ 2/10 & 1/3 & 1/20 \\ 1/20 & 1/3 & 1/20 \end{bmatrix}$$

$$d) \lambda = 1$$

$$e) 740 + 1029 + 400 = 2169$$

$$\frac{1029}{2169}$$

$$A = S D S^{-1}$$

$$A^t = (S D S^{-1})^t$$

$$= (S^{-1})^t D^t S^t$$

$$= (S^t)^{-1} D^t S^t$$

But if D is diagonal,

$$D = D^t, \quad \text{so}$$

$$A^t = (S^t)^{-1} D S^t$$